

**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2026**  
**MATEMATIKA**  
**za I razred srednje škole**

1. Neka je niz  $(a_n)_{n \geq 1}$  niz realnih brojeva takav da  $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$  za svako  $n \in \mathbf{N}$  i  $(b_n)_{n \geq 1}$  je niz realnih brojeva definisan na sljedeći način

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Dokazati da  $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$  za svako  $n \in \mathbf{N}$ .

2. Naći sve prirodne brojeve  $n$  takve da  $n + 2$  dijeli proizvod

$$3(n + 3)(n^2 + 9).$$

3. U jednom kraljevstvu postoje samo novčanice vrijednosti 2, 3 i 7. Marko ide u knjižaru da kupi knjigu čija je cijena Marini poznata. Sa sobom ima ukupno 39 novčanica, ali Marina ne zna koliko je među njima novčanica svake od vrijednosti. Marina, dobra matematičarka, kaže Marku: „Bez obzira na to koliko novčanica vrijednosti 2, 3 i 7 imaš, ako ih ukupno imaš 39, sigurna sam da možeš tačno platiti cijenu knjige koristeći svoje novčanice.”  
Odrediti koliko je koštala knjiga i objasniti zašto je Marina u pravu.
4. U trouglu  $ABC$  sa težistem  $T$  važi  $AT = BC$  i  $\angle BCT = 30^\circ$ . Odrediti  $CT : AT$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2026**  
**MATEMATIKA**  
**za II razred srednje škole**

1. Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + a^2b} + \frac{b^3 + c^3}{b^3 + b^2c} + \frac{c^3 + a^3}{c^3 + c^2a} \geq 3.$$

2. Naći sve cijele brojeve  $a, b, c$  koji zadovoljavaju sistem

$$ab + c = 100, \quad bc + a = 87, \quad ca + b = 60.$$

3. Neka je  $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$  takav da za svaka dva različita elementa  $x, y \in S$  važi  $|x - y| > 2$ , a za svaka dva različita neparna elementa  $x, y \in S$  važi  $|x - y| > 6$ . Odredi najveći mogući broj elemenata skupa  $S$ .

4. U trouglu  $ABC$  sa težištem  $T$  važi  $AT = BC$  i  $\angle BCT = 30^\circ$ . Odrediti  $CT : AT$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2026**  
**MATEMATIKA**  
**za III razred srednje škole**

1. Neka je  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  polinom sa realnim koeficijentima takav da važi  $a_i = a_{n-i}$  za svaki  $i = 0, 1, \dots, n$ , pri čemu je  $a_n \neq 0$ .
- (a) Dokazati da ako je  $c$  korijen polinoma  $P(x)$  tada je i  $\frac{1}{c}$  korijen polinoma  $P(x)$ .
- (b) Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_k$  svi realni korijeni polinoma  $P(x)$ , bez ponavljanja. Dokazati da važi

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \geq k.$$

2. Naći sve cijele brojeve  $a, b, c$  koji zadovoljavaju sistem

$$ab + c = 100, \quad bc + a = 87, \quad ca + b = 60.$$

3. U ravni je dato 2026 tačaka. Bilo koje 3 od njih formiraju trougao površine ne veće od 1. Dokazati da se svih 2026 tačaka može smjestiti unutar nekog trougla površine ne veće od 4.
4. Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  su tangentni na pravu  $l$  u tačkama  $A$  i  $B$  i tangentni su jedan na drugog u spoljašnjoj tački  $D$ . Tačka  $E$  je izabrana proizvoljno na manjem luku  $BD$  kruga  $k_2$ . Prava  $DE$  siječe krug  $k_1$  u još jednoj tački  $C$ . Dokazati da je  $BE$  ortogonalno na  $AC$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2026**  
**MATEMATIKA**  
**za IV razred srednje škole**

1. Neka je  $M$  najveći cijeli broj takav da su i  $M + 1213$  i  $M + 3773$  potpuni kvadrati. Odrediti  $M$ .
2. Na stolu se nalazi 2026 novčića i svi su na početku okrenuti glavom nagore. Igrač igra 2026 rundi. U  $i$ -toj rundi, za svako
$$i = 1, 2, \dots, 2026,$$
on okrene tačno  $i$  proizvoljno izabranih novčića na suprotnu stranu.  
Da li je moguće da nakon svih 2026 rundi svi novčići budu okrenuti pismom nagore?
3. Odrediti sve funkcije  $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$   $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ , za koje važi  $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$ .
4. Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  su tangentni na pravu  $l$  u tačkama  $A$  i  $B$  i tangentni su jedan na drugog u spoljašnjoj tački  $D$ . Tačka  $E$  je izabrana proizvoljno na manjem luku  $BD$  kruga  $k_2$ . Prava  $DE$  siječe krug  $k_1$  u još jednoj tački  $C$ . Dokazati da je  $BE$  ortogonalno na  $AC$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**